Isaac Newton (1642-1727)

Primera ley (ley de inercia o principio de Galileo)

En la ausencia de fuerzas exteriores toda partícula continúa en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme respecto de un sistema de referencia inercial o galileano.

Segunda ley (ley de la fuerza)

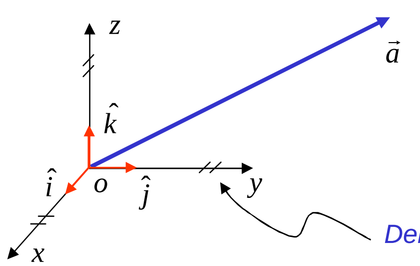
La fuerza neta aplicada sobre un cuerpo es proporcional a la aceleración que adquiere dicho cuerpo y tienen la misma dirección y sentido. La constante de proporcionalidad es la masa del cuerpo.

Tercera ley (principio de acción y reacción)

Por cada fuerza que actúa sobre un cuerpo, éste realiza una fuerza igual pero de sentido opuesto sobre el cuerpo que la produjo. Dicho de otra forma: Las fuerzas siempre se presentan en pares de igual magnitud y sentido opuesto y están situadas sobre la misma recta.

Nomenclatura y convenciones

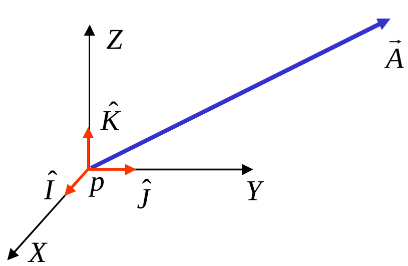
Sistema de referencia Absoluto (Inercial) (Fijo) (Galileano)



Todo lo referido a este sistema se escribe en minúsculas !

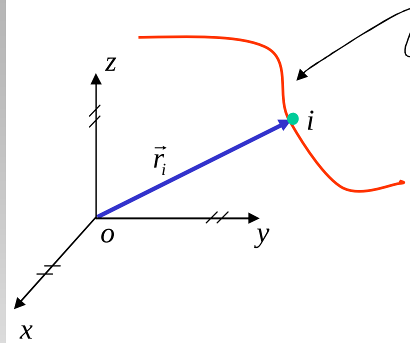
Denotan que el sistema es inercial

Sistema de referencia Relativo (No inercial) (Móvil)



Todo lo referido a este sistema se escribe en mayúsculas !

Definiciones



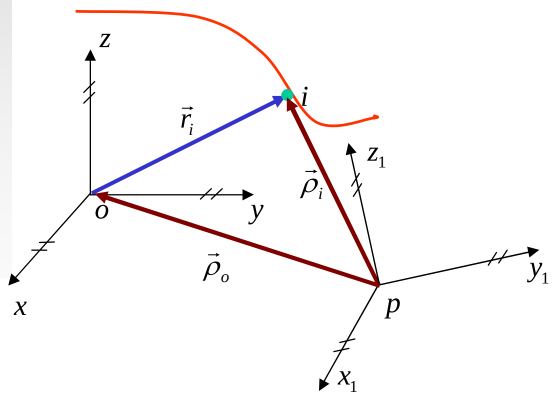
Trayectoria de la partícula i

Posición absoluta de i $\vec{r}_i = \vec{r}_{(t)}$

Velocidad absoluta de i $\vec{v}_i = \dfrac{d\vec{r}_i}{dt} = \dot{\vec{r}}_i$

Aceleración absoluta de i $\vec{a}_i = \dfrac{d\vec{v}_i}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}_i$

Velocidad de i calculada en oxyz es igual a la velocidad de i calculada en $p\,x_1 y_1 z_1$? $\Rightarrow$ $\dfrac{d\vec{r}_i}{dt} \overset{?}{=} \dfrac{d\vec{\rho}_i}{dt}$



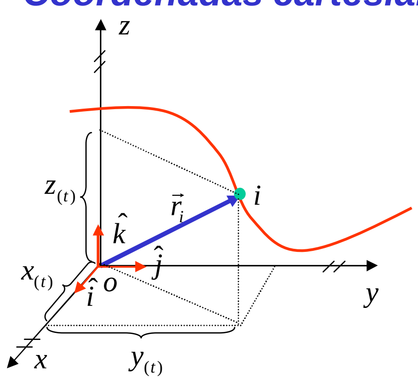
$$\vec{\rho}_i = \vec{\rho}_o + \vec{r}_i \qquad \forall t$$

$$\frac{d\vec{\rho}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\rho}_o + \vec{r}_i\right)$$

$$= \frac{d\vec{\rho}_o}{dt} + \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$= \vec{0} + \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

Coordenadas cartesianas



Posición absoluta de i :

$$\vec{r}_i = x_{(t)}\hat{i} + y_{(t)}\hat{j} + z_{(t)}\hat{k} \qquad \forall t$$

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x_{(t)}\hat{i} + y_{(t)}\hat{j} + z_{(t)}\hat{k}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(x_{(t)}\hat{i}\right) + \frac{d}{dt}\left(y_{(t)}\hat{j}\right) + \frac{d}{dt}\left(z_{(t)}\hat{k}\right)$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}\hat{i} + x\frac{d\hat{i}}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\hat{j} + y\frac{d\hat{j}}{dt}\right) + \left(\frac{dz}{dt}\hat{k} + z\frac{d\hat{k}}{dt}\right)$$

Los versores i, j y k no cambian en el tiempo !
(base inercial)

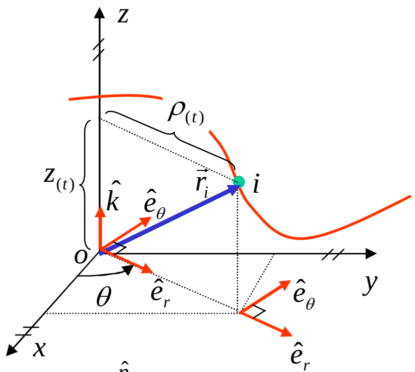
$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \frac{d\hat{j}}{dt} = \frac{d\hat{k}}{dt} = \bar{0}$$

Definiendo: $(\dot{\ }) = \dfrac{d()}{dt} \qquad (\ddot{\ }) = \dfrac{d^2()}{dt^2}$

$$\vec{v}_i = \dot{x}_{(t)}\hat{i} + \dot{y}_{(t)}\hat{j} + \dot{z}_{(t)}\hat{k}$$ ***Velocidad absoluta de i***

$$\vec{a}_i = \ddot{x}_{(t)}\hat{i} + \ddot{y}_{(t)}\hat{j} + \ddot{z}_{(t)}\hat{k}$$ ***Aceleración absoluta de i***

Coordenadas cilíndricas

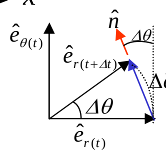


Posición absoluta de i :

$$\vec r_i = \rho_{(t)}\hat e_r + z_{(t)}\hat k \qquad \forall t$$

$$\vec v_i = \frac{d\vec r_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho\,\hat e_r + z\,\hat k\right) = \dot\rho\,\hat e_r + \rho\frac{d\hat e_r}{dt} + \dot z\,\hat k$$

$$\frac{d\hat e_r}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\hat e_{r(t+\Delta t)} - \hat e_{r(t)}}{\Delta t} = ?$$



$$\Delta\hat e_r = \hat e_{r(t+\Delta t)} - \hat e_{r(t)} = \left|\Delta\hat e_r\right|\hat n = 2\left|\hat e_r\right| sen\left(\Delta\theta/2\right)\hat n = 2 sen\left(\Delta\theta/2\right)\hat n$$

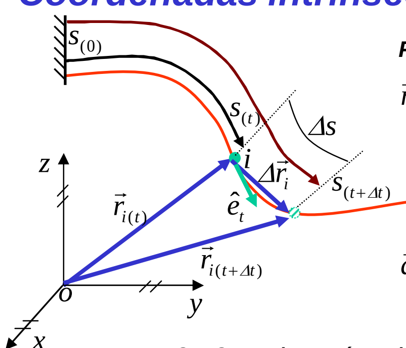
$$\Delta\theta \approx 0 \Rightarrow \begin{cases} sen\left(\Delta\theta/2\right) \approx \Delta\theta/2 \\ \hat n \approx \hat e_\theta \end{cases}$$

$$\frac{d\hat e_r}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\hat e_{r(t+\Delta t)} - \hat e_{r(t)}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2 sen\left(\Delta\theta/2\right)\hat n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat e_\theta = \dot\theta\,\hat e_\theta \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\hat e_r}{dt} = \dot\theta\,\hat e_\theta \\ \dfrac{d\hat e_\theta}{dt} = -\dot\theta\,\hat e_r \end{cases}$$

La derivada temporal de un vector de módulo constante es perpendicular al mismo en el sentido de la rotación, e igual a la rapidez con la que rota !

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec v_i = \dot\rho\,\hat e_r + \rho\dot\theta\,\hat e_\theta + \dot z\,\hat k & \textit{Velocidad absoluta de i} \\ \vec a_i = \left(\ddot\rho - \rho\dot\theta^2\right)\hat e_r + \left(\rho\ddot\theta + 2\dot\rho\dot\theta\right)\hat e_\theta + \ddot z\,\hat k & \textit{Aceleración absoluta de i} \end{cases}$$

Coordenadas intrínsecas



Posición absoluta de i :

$$\vec r_i = \vec r_i\left(s_{(t)}\right) \Rightarrow \vec v_i = \frac{d\vec r_i}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec r_{i(t+\Delta t)} - \vec r_{i(t)}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec r_i}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\hat e_t = \dot s_{(t)}\hat e_t$$

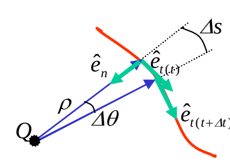
$$\vec a_i = \frac{d}{dt}\left(\dot s_{(t)}\hat e_t\right) = \ddot s_{(t)}\hat e_t + \dot s_{(t)}\frac{d\hat e_t}{dt} \qquad \frac{d\hat e_t}{dt} = ?$$

Definiendo:

Q …Centro instantáneo de curvatura de la curva

ρ …Radio de curvatura de la curva

$\hat e_n$… Versor que apunta hacia el centro de curvatura



$$\Delta s = \rho\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \Delta s/\rho \Rightarrow \dot\theta = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\rho\Delta t} = \frac{\dot s}{\rho} \qquad \left.\begin{matrix} \dfrac{d\hat e_t}{dt} = \dot\theta\,\hat e_n \\ \\ \end{matrix}\right\} \quad \frac{d\hat e_t}{dt} = \frac{\dot s_{(t)}}{\rho}\hat e_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec v_i = \dot s_{(t)}\hat e_t & \textit{Velocidad absoluta de i} \\ \vec a_i = \ddot s_{(t)}\hat e_t + \dfrac{\dot s_{(t)}^2}{\rho}\hat e_n & \textit{Aceleración absoluta de i} \end{cases}$$

La velocidad es siempre tangencial a la trayectoria !

La aceleración tiene una componente tangencial a la trayectoria y una componente dirigida hacia el centro de curvatura de la curva en ese punto (normal). La última sólo se anula si la partícula se mueve en línea recta !